

# *Vorstellungskraft* without sensory media

Jakob Steiner and the figure in geometry

AMS Seattle 2016

Jemma Lorenat, Pitzer College

[jlorenat@pitzer.edu](mailto:jlorenat@pitzer.edu)

“The reader will find no figures in this work. The methods which I set forth do not require either constructions or geometrical or mechanical reasonings: but only algebraic operations, subject to a regular and uniform rule of procedure.”

Joseph-Louis Lagrange (1788)  
*Mécanique Analytique*

“However, if one is not afraid of the sacrifice of time and effort involved, then one can omit the figure in the proof of any theorem; indeed, the theorem is only truly demonstrated if the proof is completely independent of the figure.”

Moritz Pasch (1882)

*Vorlesungen über neuere Geometrie*

“The outcome will show that these constructions [*Gebilde*] are in fact the actual foundation [*Grundlage*] of synthetic geometry.”

Jakob Steiner (1832)

*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit  
geometrischer Gestalten von einander*

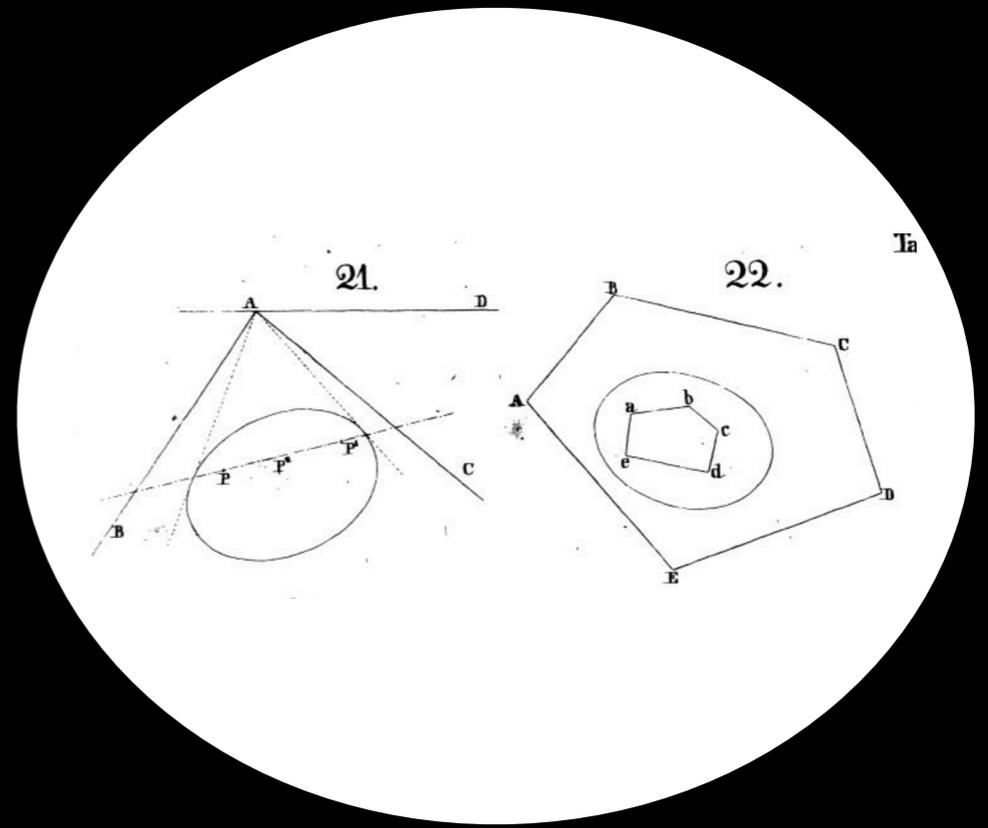
1. Steiner and geometry up to 1832

2. *Systematische Entwicklung*

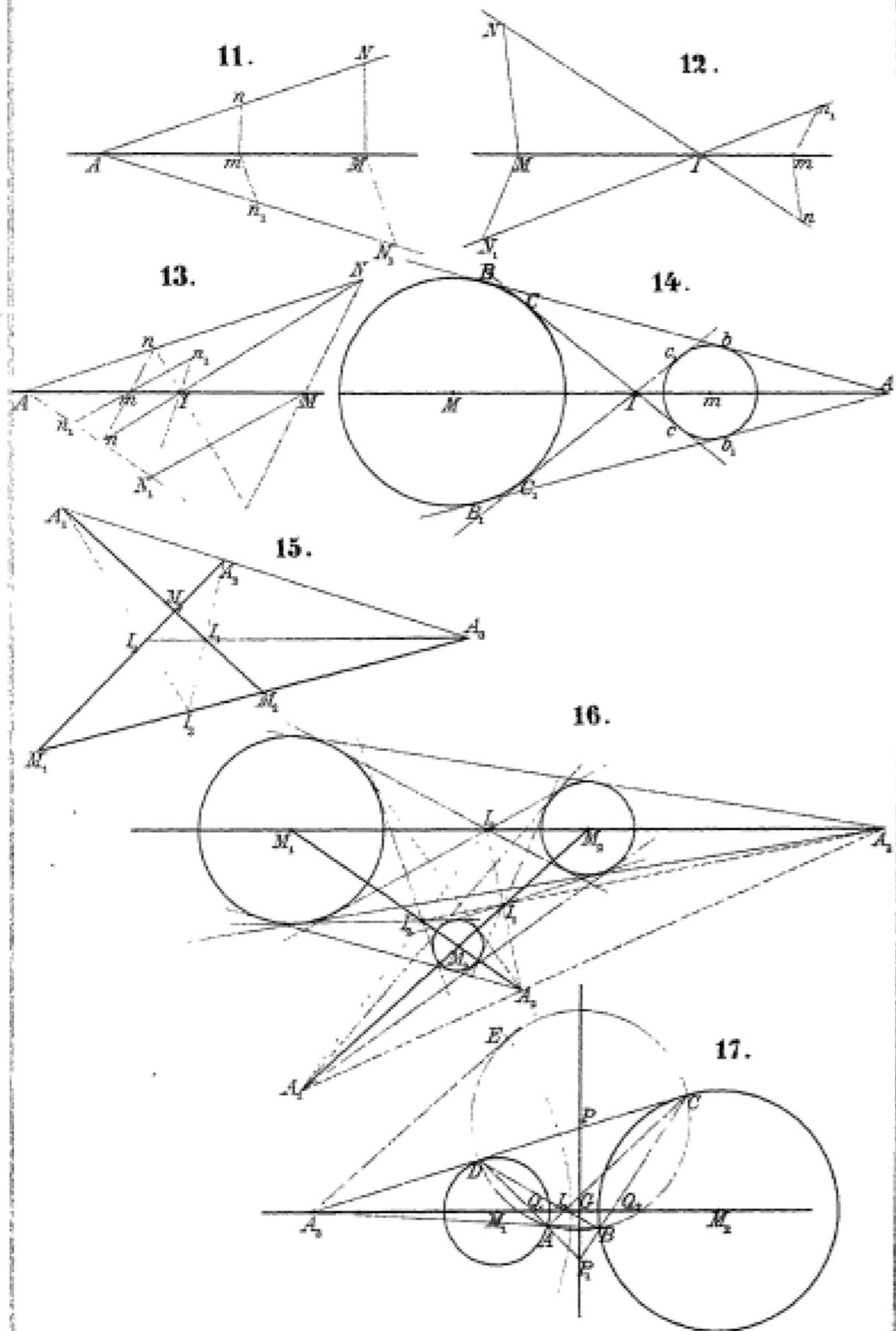
3. The world of the senses

4. Conclusions

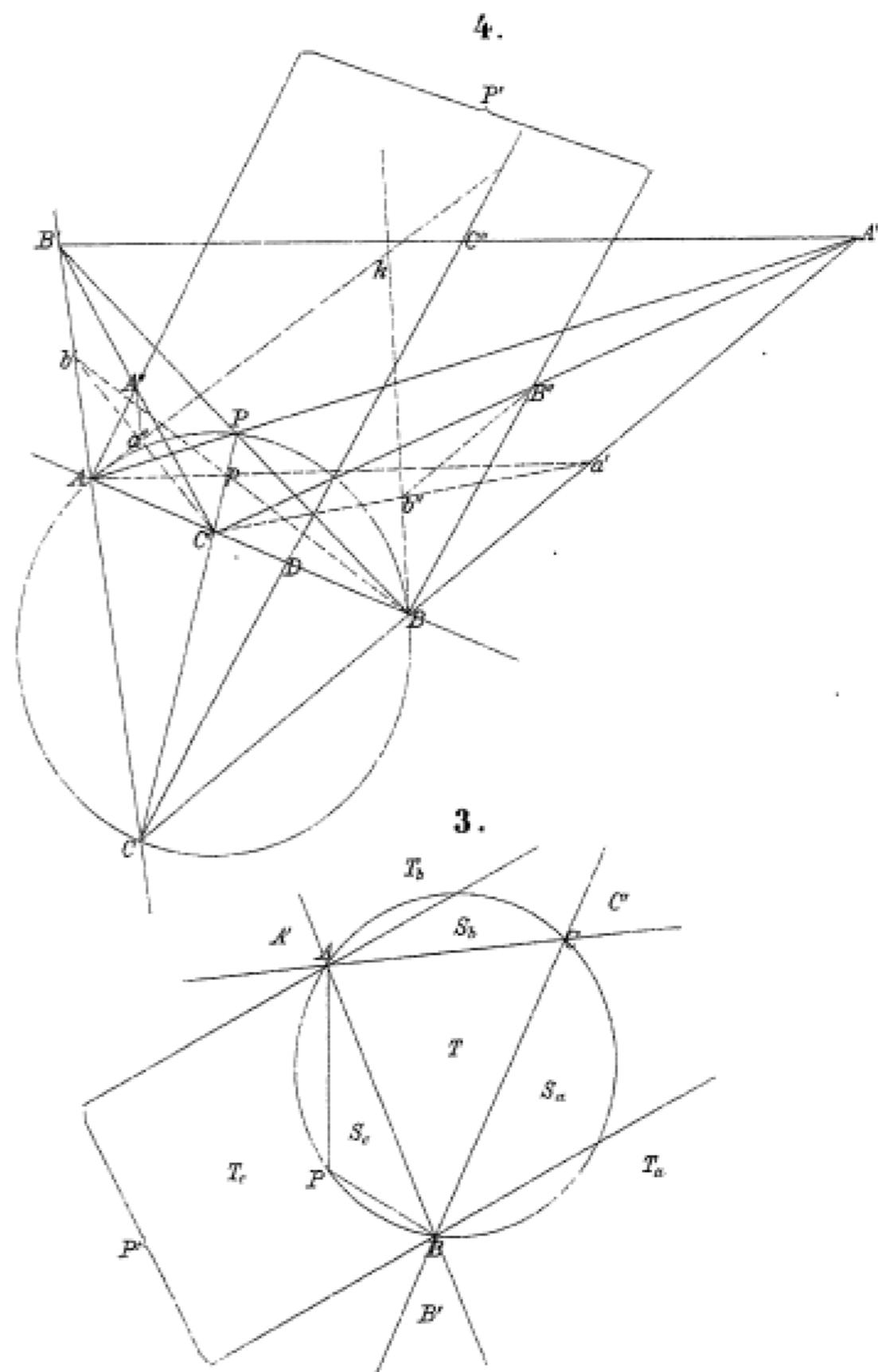
# 1. Steiner and geometry up to 1832



Einige geometr. Betrachtungen. Fig. 11-17.



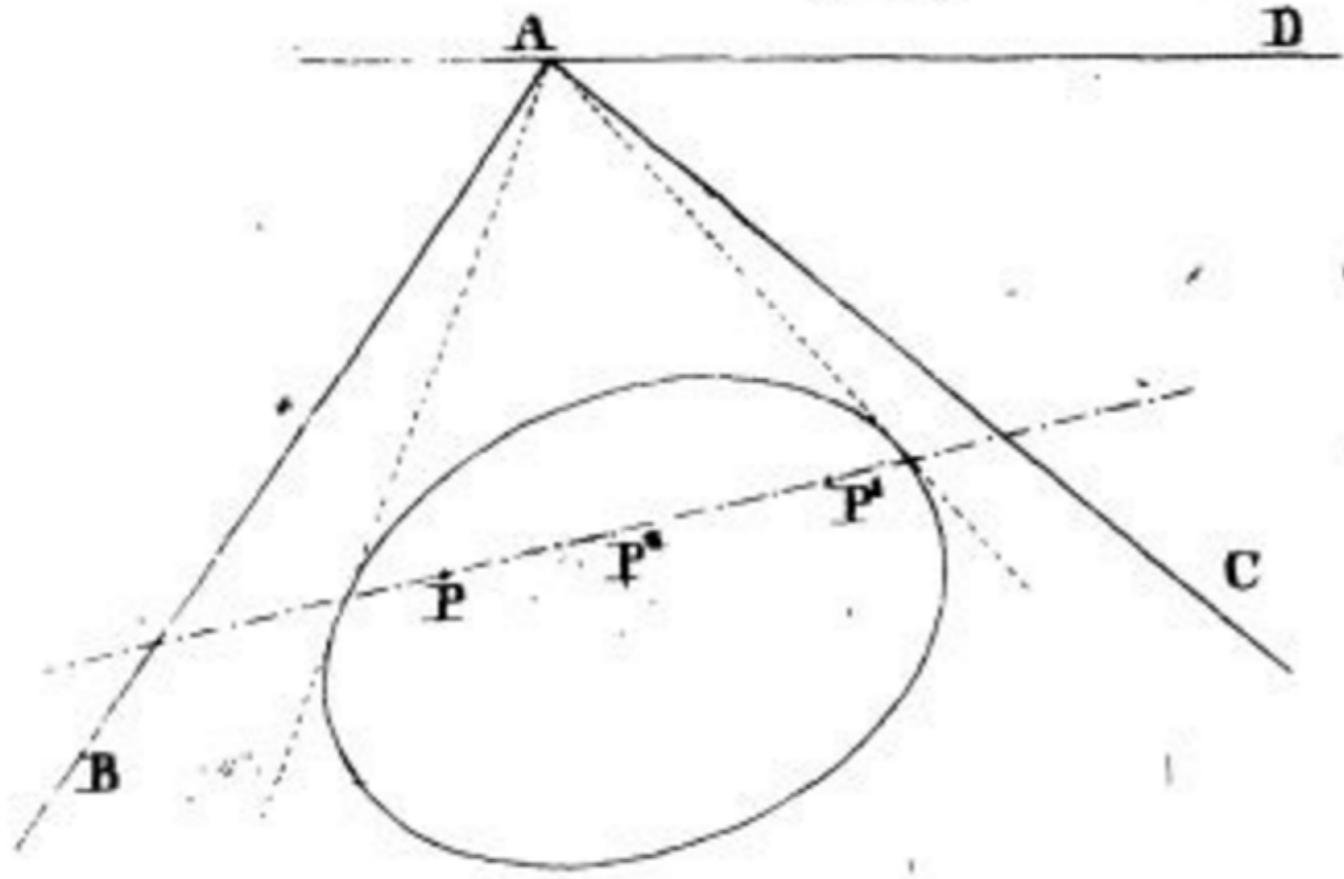
Théorèmes relatifs aux sections coniques Fig. 3-4



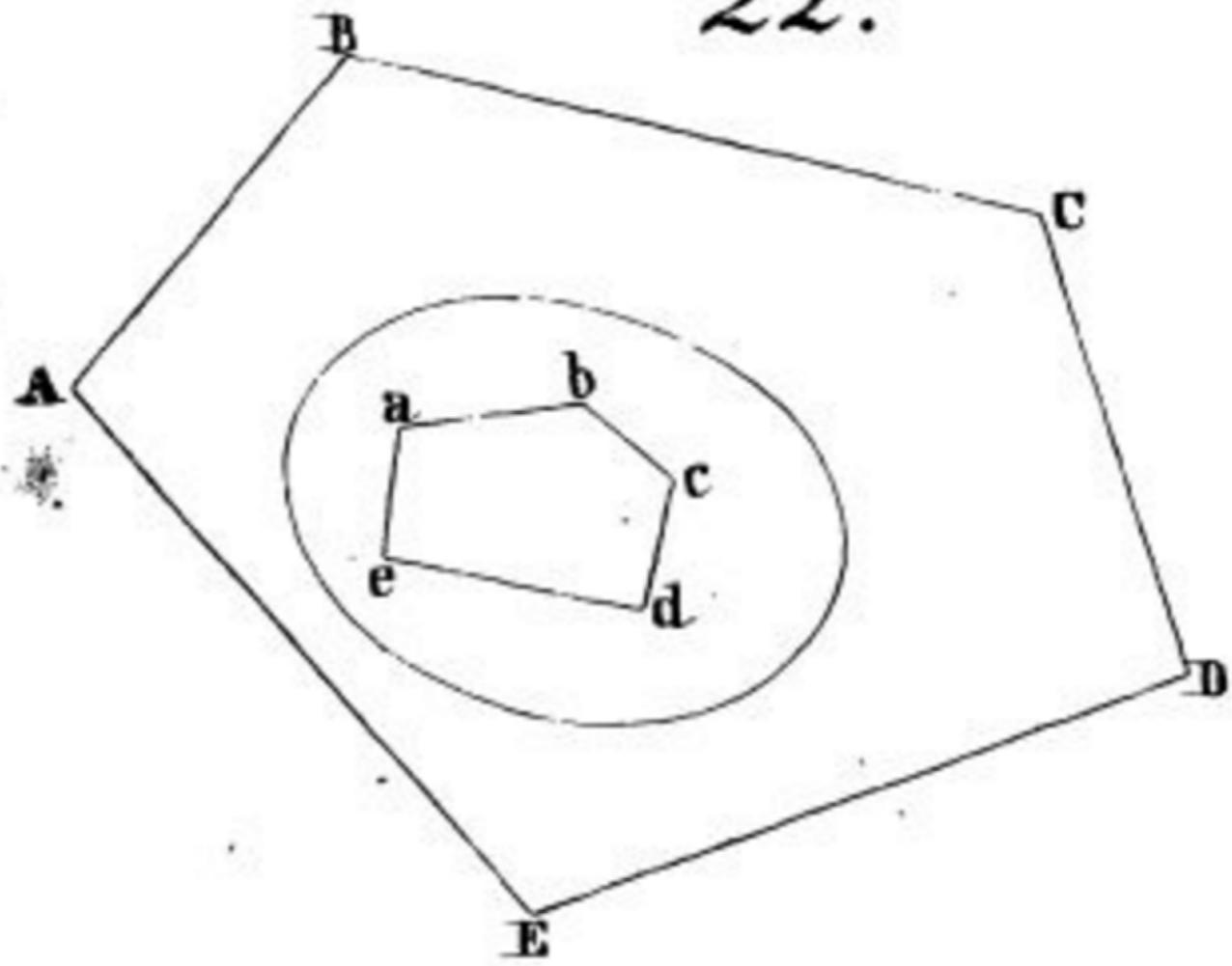
“The reflexions that the memoir of M. Steiner suggests are perhaps too far from the one subject of this memoir; but **it will be difficult, without the use of figures, to give an analysis of the development that it merits.**”

Anonymous review (1829)  
*Bulletin des sciences mathématiques,  
astronomiques, physiques et chimiques*

21.



22.



La

*Notions préliminaires.*

1. Deux points, distincts l'un de l'autre, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux points sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.

2. Trois points donnés dans l'espace, ne se confondant pas deux à deux et n'appartenant pas à une même ligne droite, déterminent un plan indéfini qui, lorsque ces trois points sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.

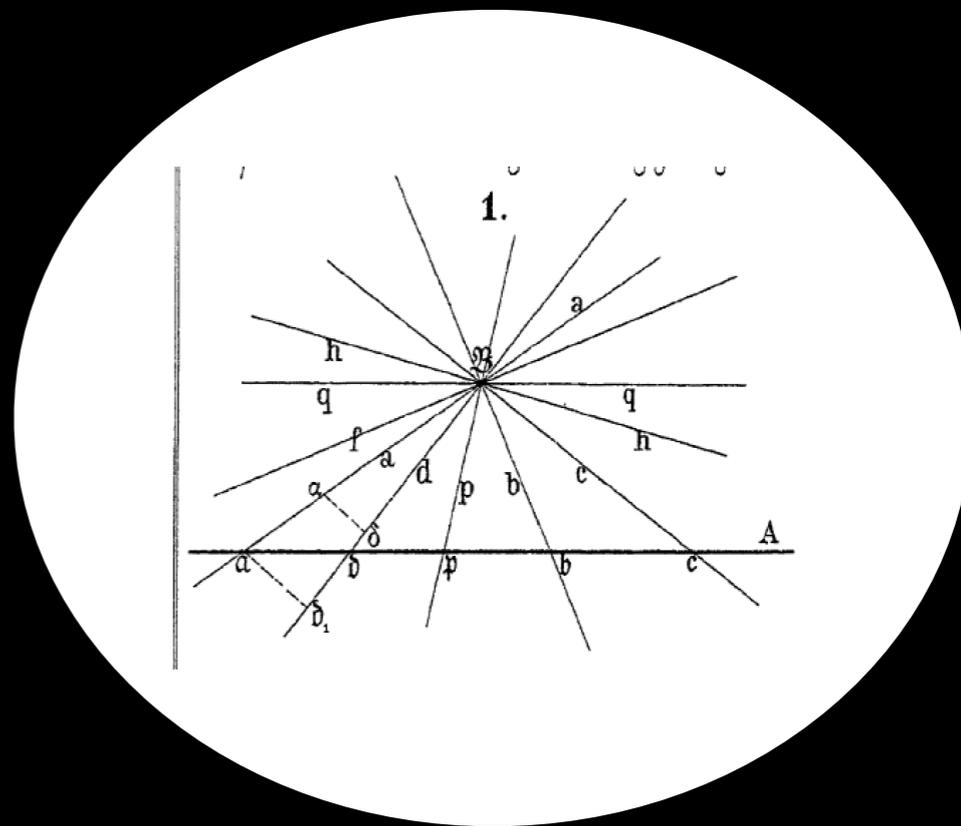
3. Un plan peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un point qui ne

1. Deux plans, non parallèles, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux plans sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.

2. Trois plans, non parallèles deux à deux dans l'espace, et ne passant pas par une même ligne droite, déterminent un point qui, lorsque ces trois plans sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.

3. Un point peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un plan dans le-

2. Systematische Entwicklung der  
Abhängigkeit geometrischer Gestalten  
von einander (1832)

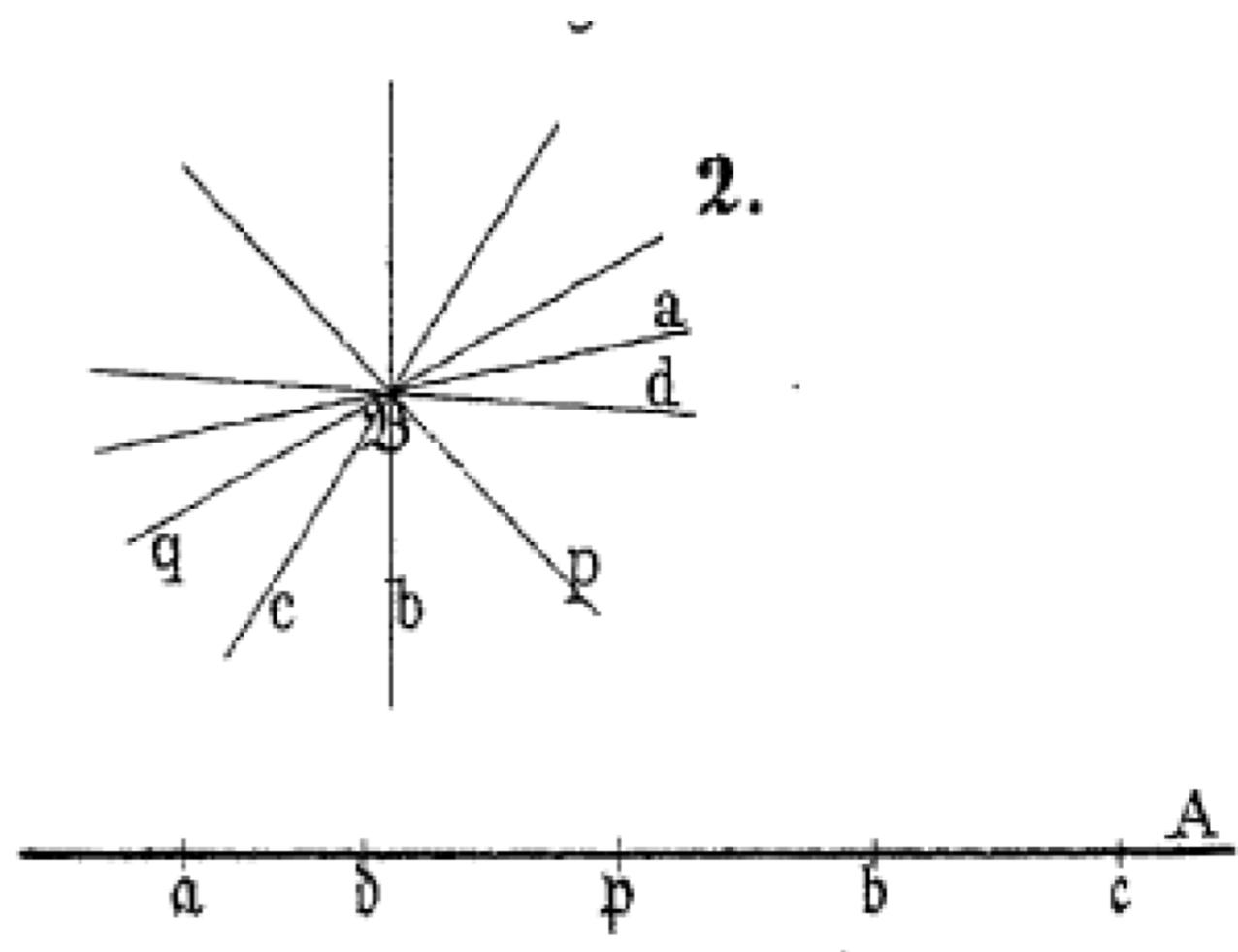
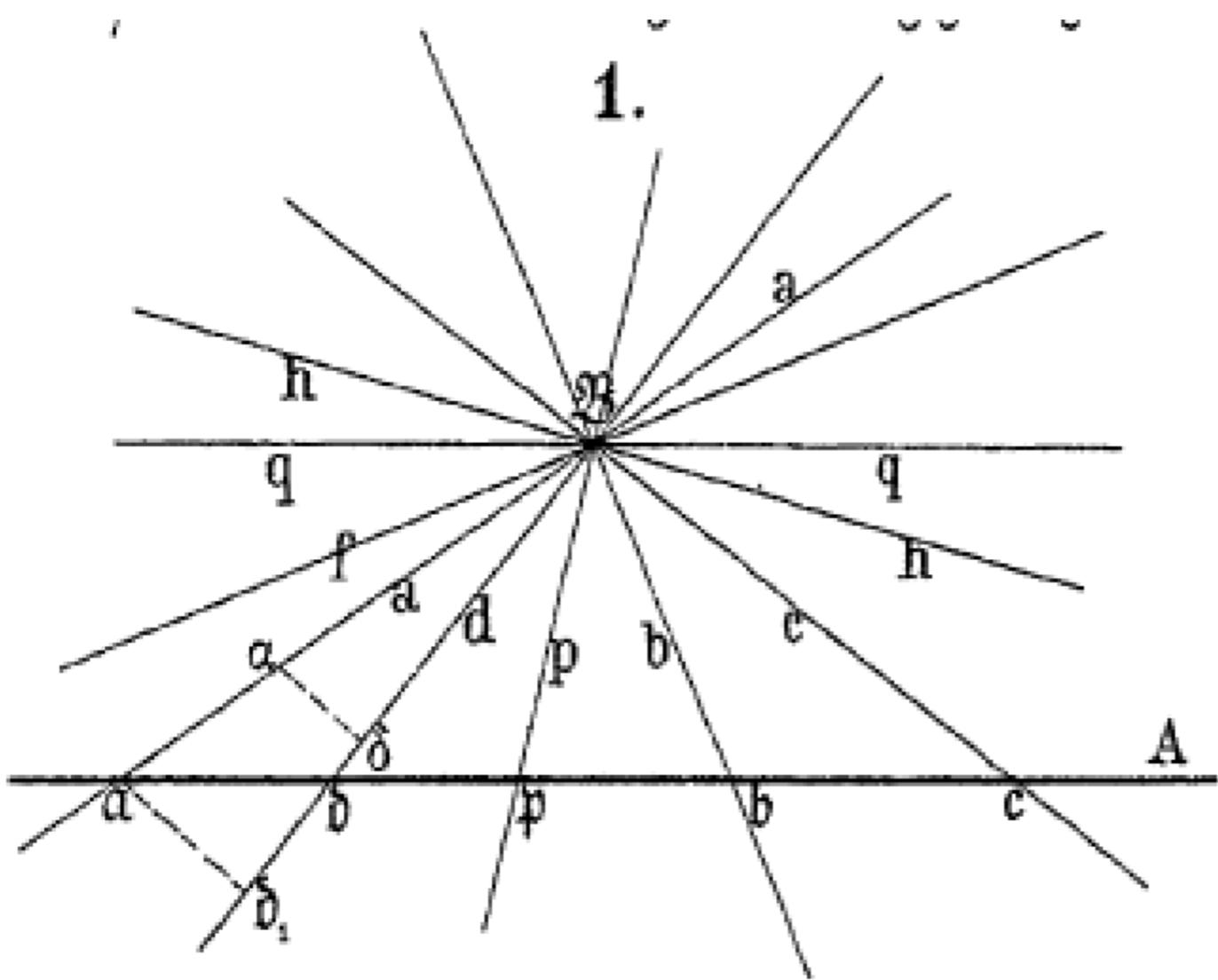


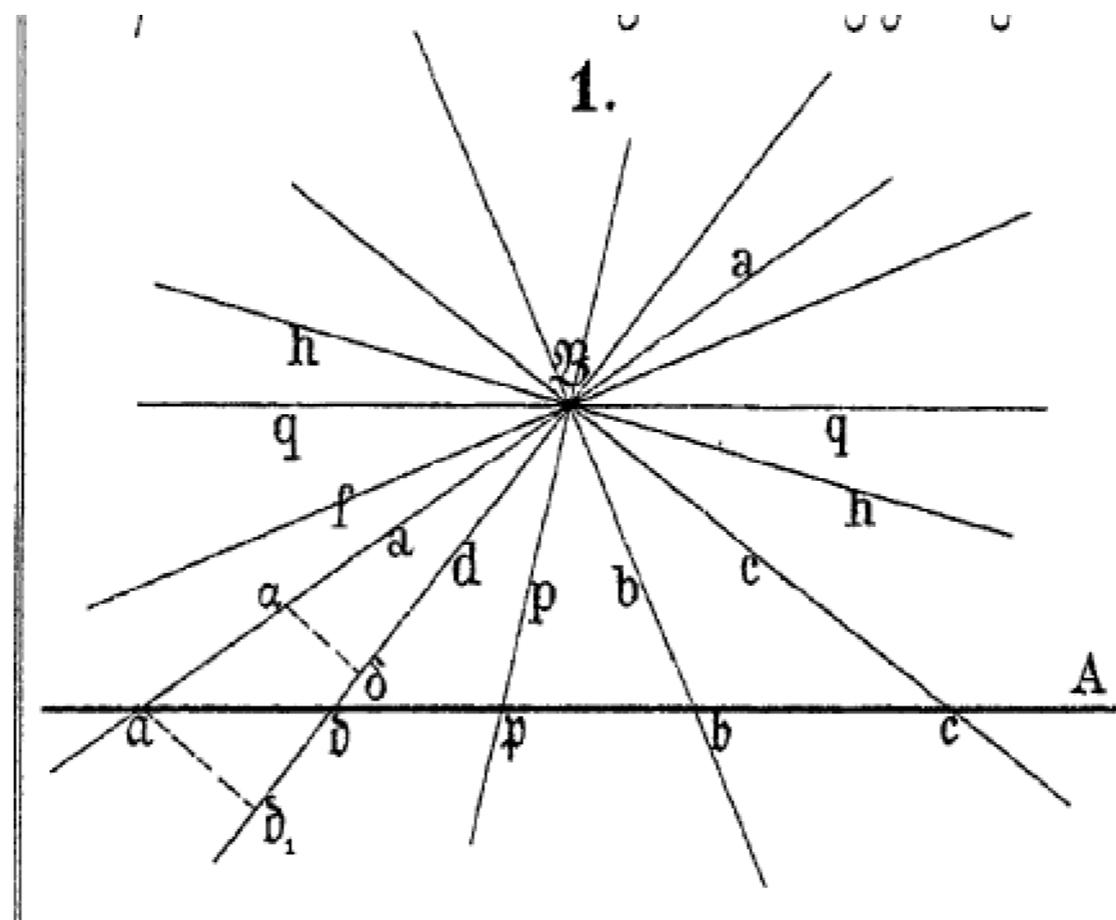
“The basic representations [*Grundvorstellungen*] required in geometry are: the space, the plane, the line (straight line) and the point.”

Jakob Steiner (1832)  
*Systematische Entwicklung*

1. **The line.** An innumerable set of consecutive points is conceivable in the line, which, from any starting point, extends infinitely in two opposing sides.
2. **The planar pencil of rays.** Through each point in a plane innumerable lines are possible; the totality of all such lines should be called "a planar pencil of rays" or "a pencil of rays in the plane," namely the lines should, with respect to their composition, be called "rays" and the point, in which the rays meet, will be called the "midpoint" of the bundle of rays.







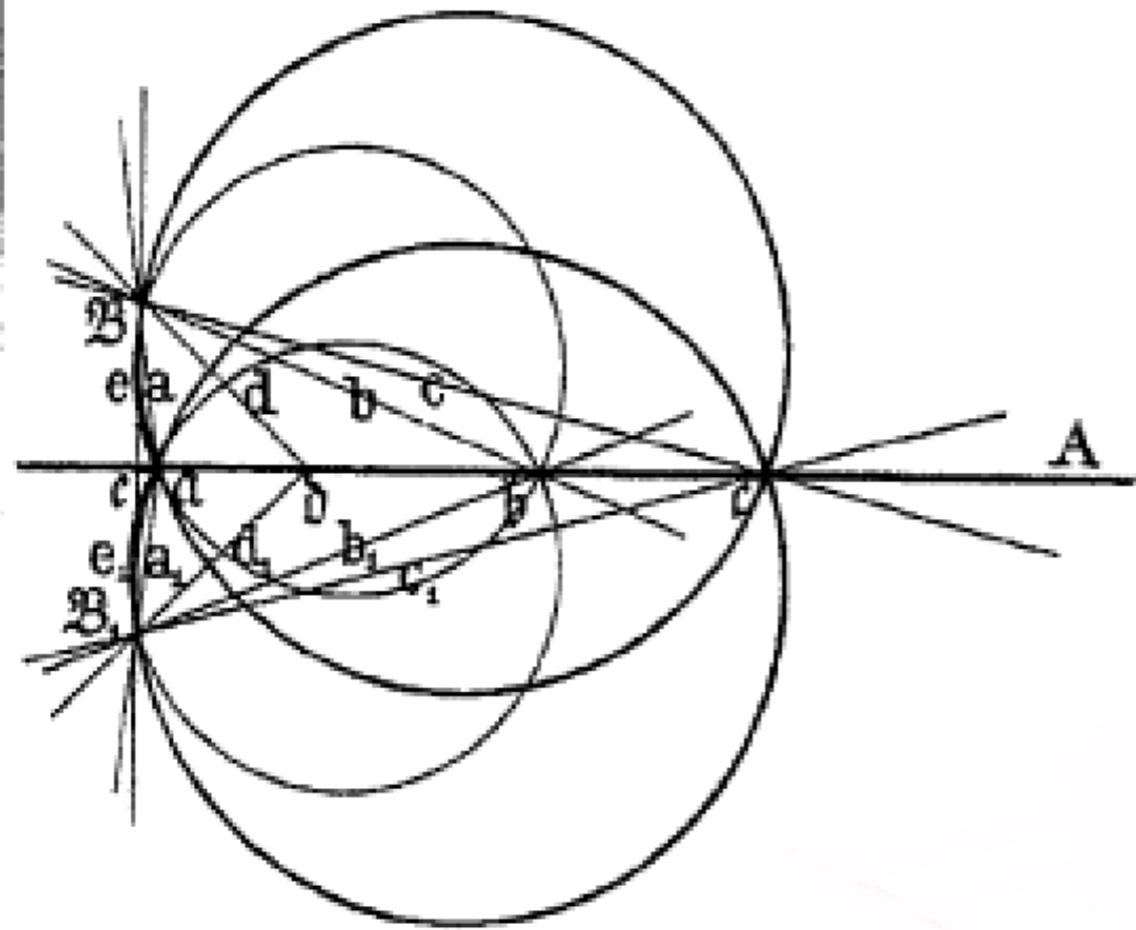
Es sei  $p$  (Fig. 1) derjenige Strahl, der auf der Geraden  $A$  senkrecht ist. Aus einem beliebigen Punkte  $\alpha$  des Strahles  $a$  und aus  $\alpha$  seien auf den Strahl  $d$  die Lothe  $\alpha\delta$ ,  $\alpha\delta_1$  herabgelassen, dann sind einerseits die rechtwinkligen Dreiecke  $Bpd$  und  $\alpha\delta_1d$ , und andererseits die rechtwinkligen Dreiecke  $B\alpha\delta_1$  und  $B\alpha\delta$  ähnlich, so dass

$$\frac{Bp}{Bd} = \frac{\alpha\delta_1}{\alpha\delta} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha\delta_1}{B\alpha} = \frac{\alpha\delta}{B\alpha},$$

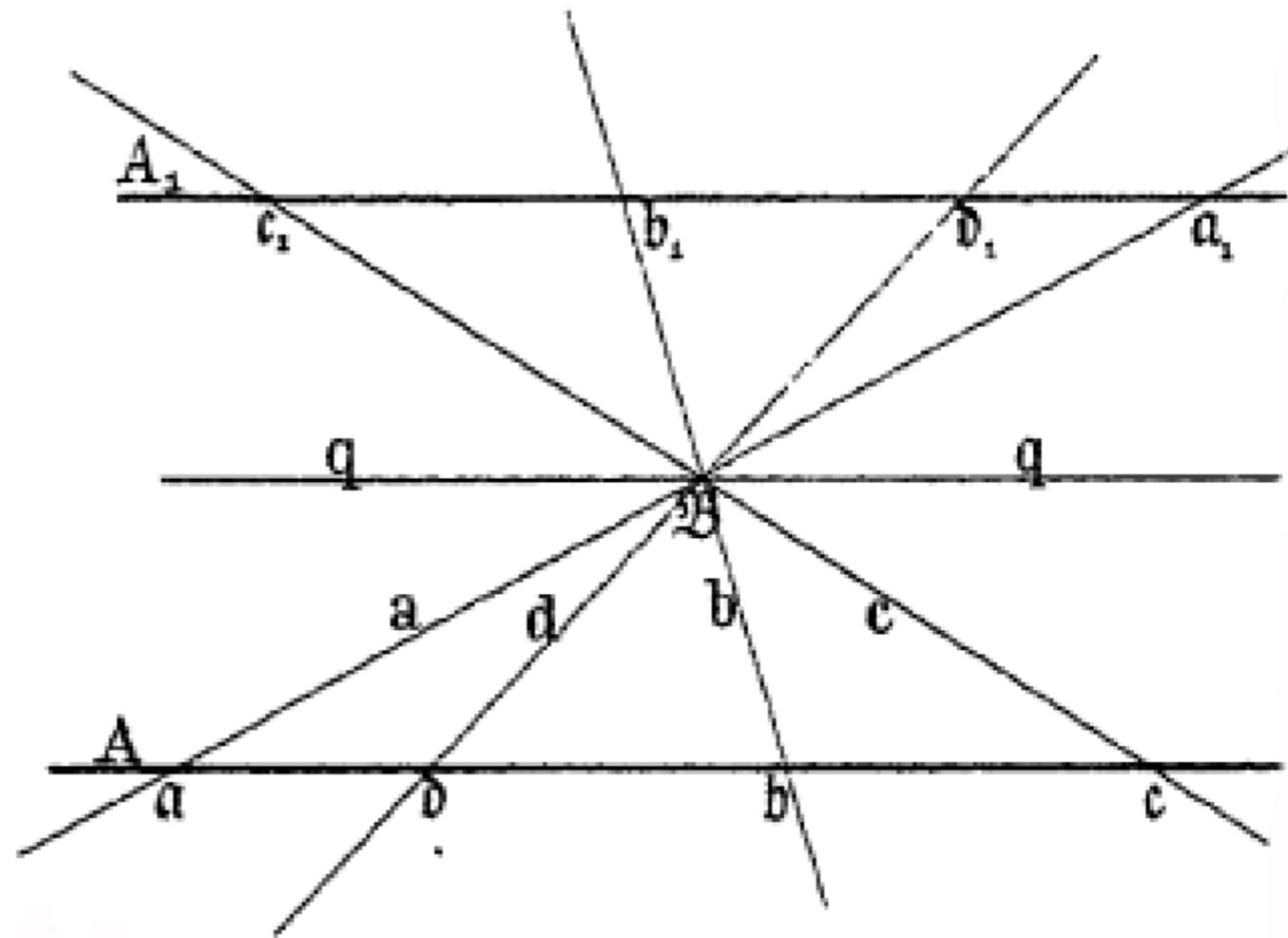
woraus durch Verbindung folgt:

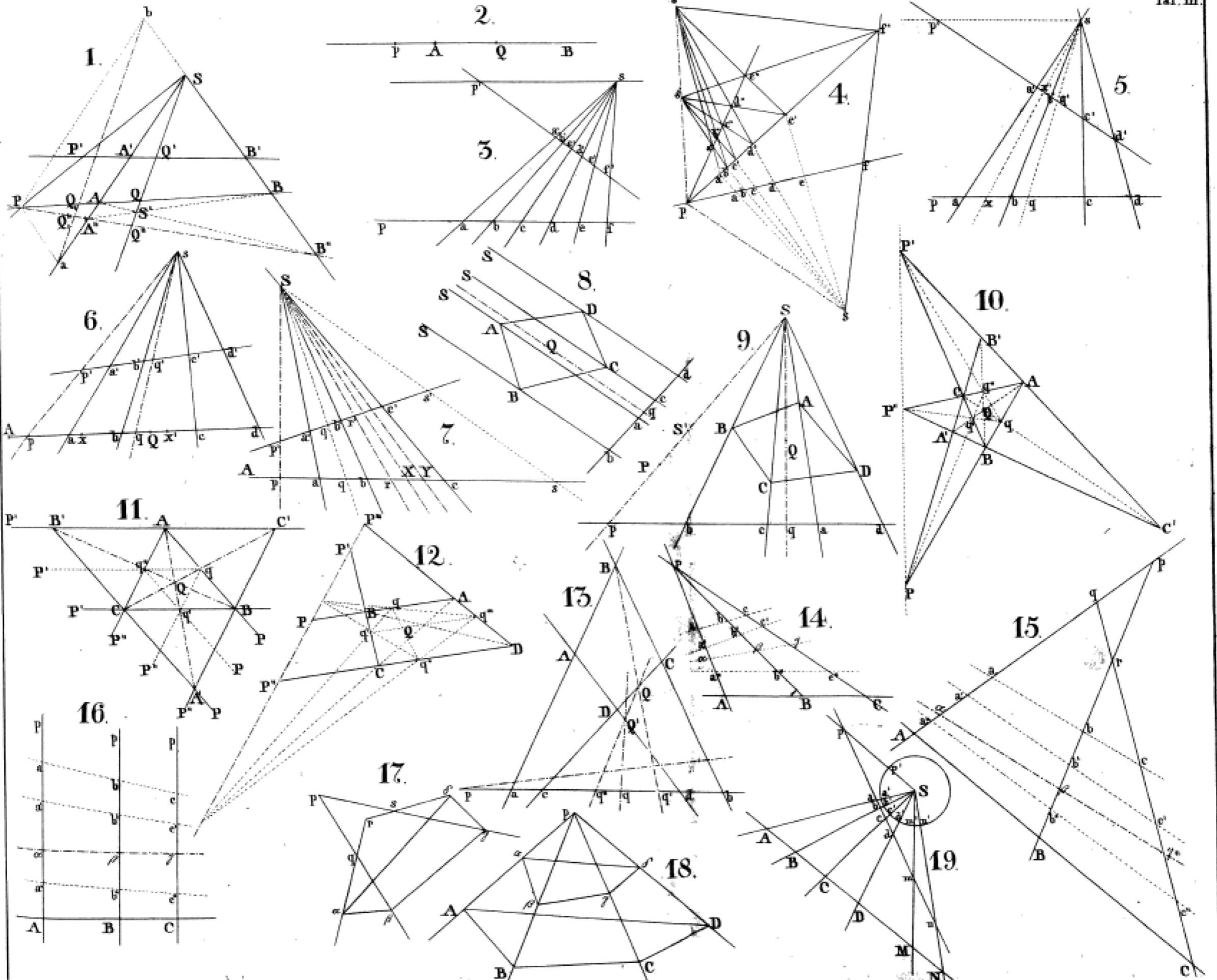
$$(1) \quad Bp \cdot \alpha\delta = B\alpha \cdot Bd \cdot \frac{\alpha\delta}{B\alpha}.$$

5.



6.





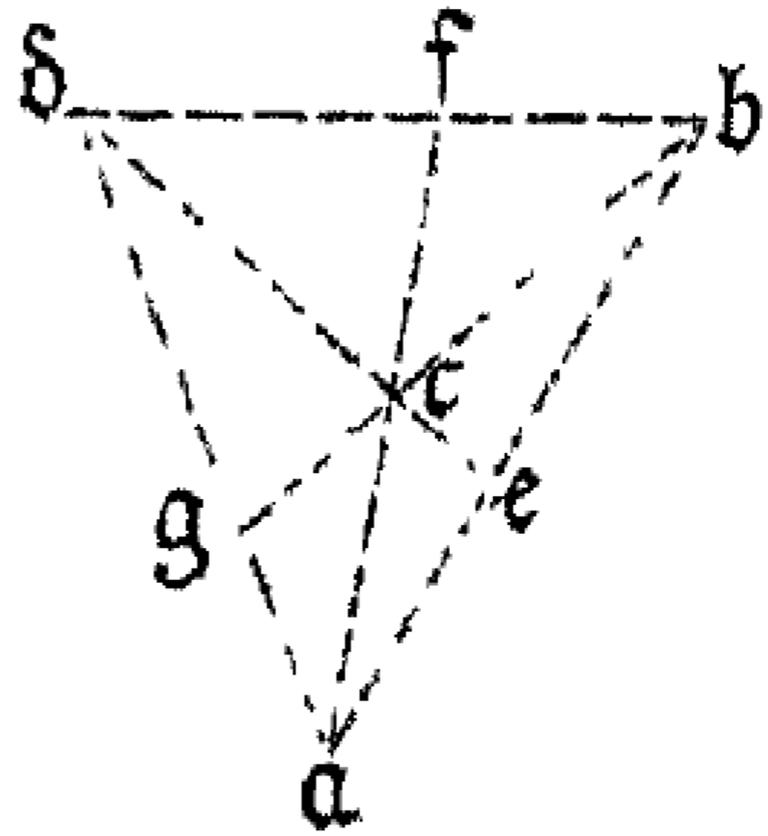
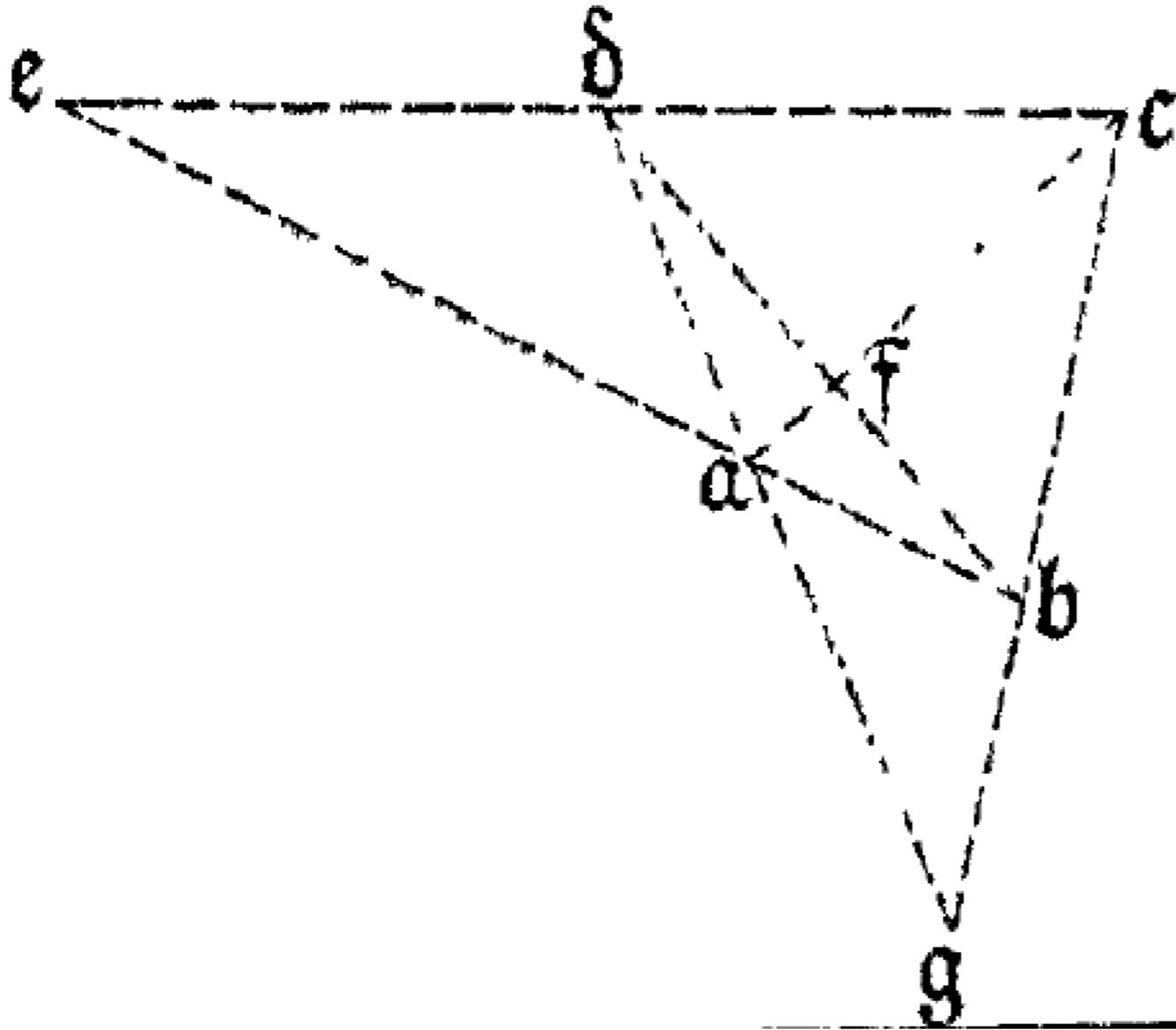
**“In the following considerations, the constructions [*Gebilde*] and their different connections, because they no longer lie in the plane, can not easily be represented through drawings (figures); but this is not necessary, because through reasonable designations adherence to the combinations of the constructions under considerations will be facilitated.”**

Jakob Steiner (1832)  
*Systematische Entwicklung*

“Overall, stereometric considerations are, in my opinion, only properly understood if they are intuited purely, without any sensory media [*Versinnlichungsmittel*], only through the inner power of representation [*Vorstellungskraft*].”

Jakob Steiner (1832)  
*Systematische Entwicklung*

25.



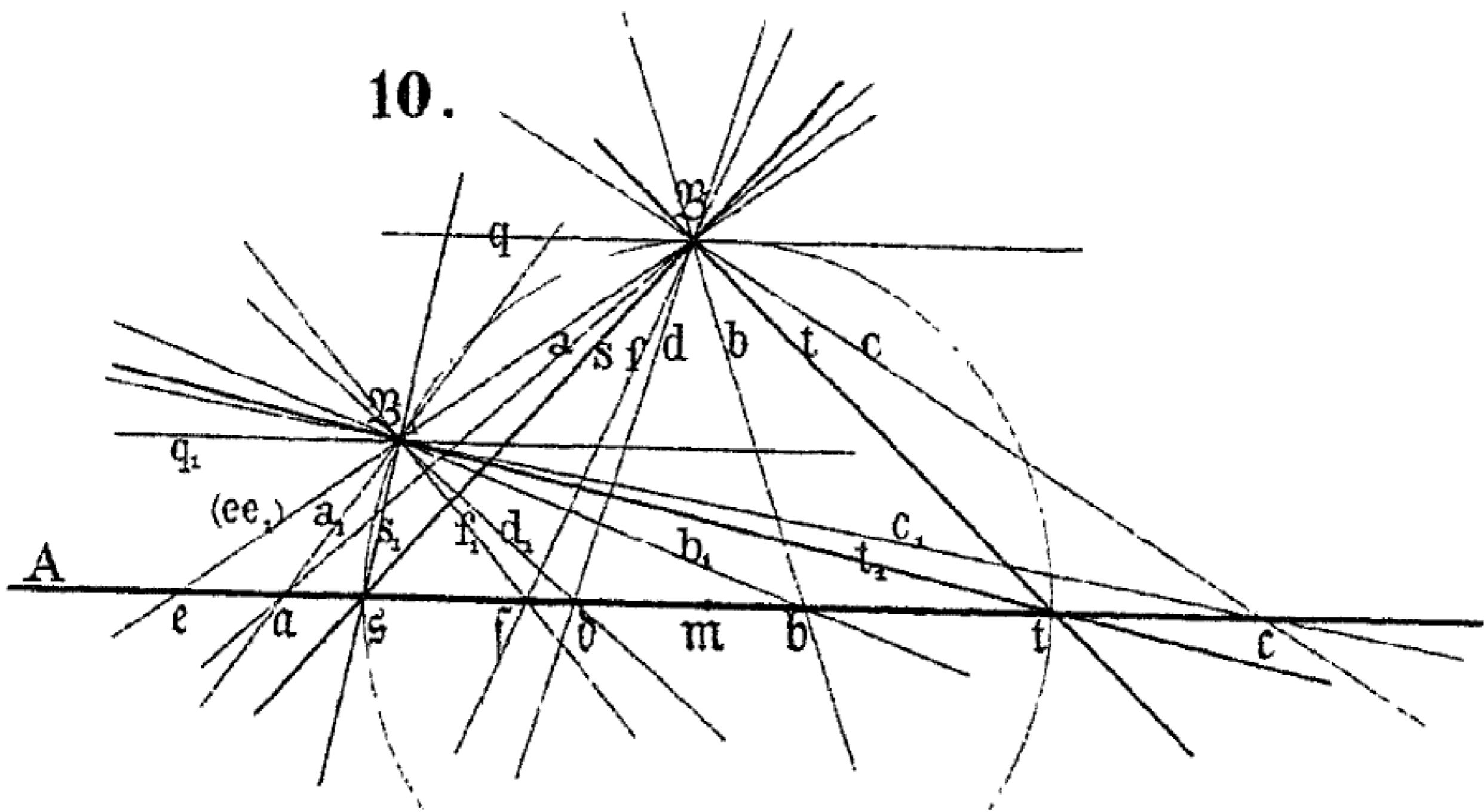
“[through the inner power of representation] one can easily and correctly **look through the entire boundary of the properties of a connected figure in all its individual cases and according to all its limits**, and recognize all these cases together as flowing from one into another or extending beyond its own limits.”

Jakob Steiner (1832)  
*Systematische Entwicklung*

“If in the beginning this free mental representation [*freie Vorstellung*] will require some effort, then one will soon acquire a certain skill in it and find sufficient compensation for the effort overcome. Whoever would seek to circumvent this effort by other means, will likely not do well, in that the ability to represent, instead of becoming healthy, strong and active, will fall into darker, more difficult views.”

Jakob Steiner (1832)  
*Systematische Entwicklung*

10.



"1. If in space one **thinks** of any one pencil of planes  $\alpha$  and any one line  $A$  with respect to each other, then one finds:

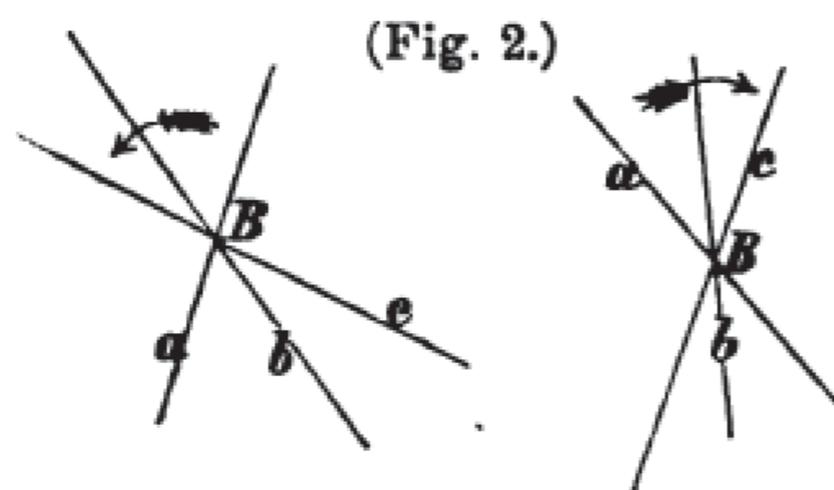
1. That in general a plane of the pencil of planes  $\alpha$  goes through each point of the line  $A$ . [...] Only one plane is parallel, or passes through the infinitely distant point, of the line  $A$ ; it is called the parallel plane."

"[...] in his lectures there were no figures; the listener's active thinking should produce such a clear picture in his mind that he could dispense with sense intuition. (He went even further later [...] by purposely darkening the room during geometry lessons!)"

Felix Klein (1926)

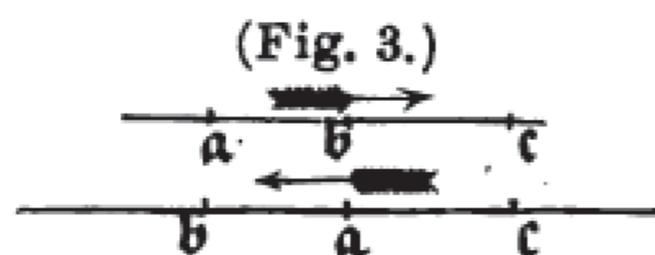
*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*

folge  $a b c$  ist der Drehungssinn von  $x$  mit bestimmt (Fig. 2).



Sind  $a$  und  $b$  zwei besondere Lagen des fortrückenden Punktes  $x$ , so kann  $x$  von  $a$  nach  $b$  auf doppelte Weise gelangen, entweder direkt oder durch den unendlichen entfernten Punkt (§ 3). Diese beiden Wege haben entgegengesetzten Richtungssinn.

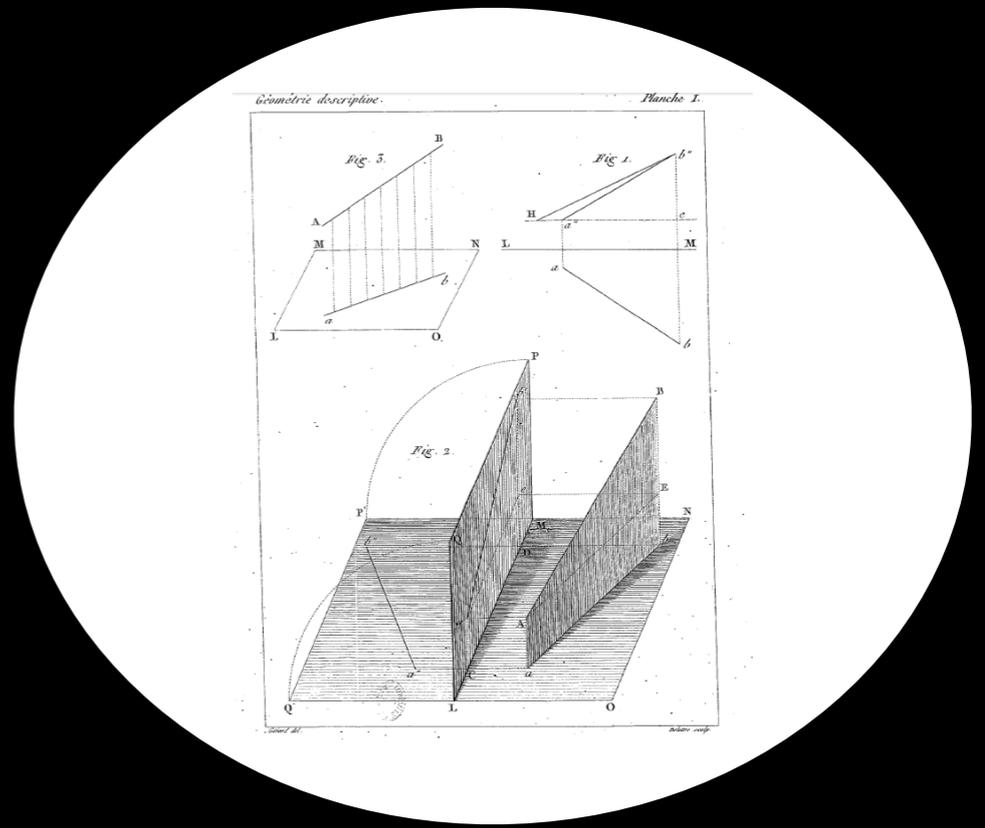
Die Zweideutigkeit hört aber auf, sobald wir drei besondere Lagen  $a b c$  annehmen und festsetzen, der Punkt  $x$  solle von  $a$  durch  $b$  nach  $c$  gelangen (ohne auf dem Wege von  $a$  nach  $b$  die Lage  $c$  eingenommen zu haben); durch die Aufeinanderfolge  $a b c$  ist der Richtungssinn von  $x$  mitbestimmt (Fig. 3).



Da nun  $a b c$  und  $a b c$  entsprechende Elemente der beiden projektivischen Gebilde sind, so wird, sobald durch die Aufeinanderfolge  $a b c$  der Drehungssinn des

Strahlbüschels festgestellt ist, durch die zugehörige Aufeinanderfolge  $a b c$  der Richtungssinn der Punktreihe unzweideutig mitbestimmt, und nehmen wir im Strahlbüschel den entgegengesetzten Drehungssinn durch die Aufeinanderfolge  $a c b$ , so wird durch die Aufeinanderfolge  $a c b$  auch der zugehörige Richtungssinn in der Punktreihe entgegengesetzt. Durch diese Bemerkung wird später jede Zweideutigkeit hinsichtlich der Lage entsprechender Elemente aufgehoben.

### 3. The World of the Senses



**"We believe it superfluous to accompany this memoir with figures, often more overwhelming than useful in the geometry of space;** figures that we could besides only present in a unique and individual aspect to the reader, who could, instead, construct and fashion them to his taste, if he judges the assistance at all necessary. We are concerned, indeed, only with logical deductions, always easy to follow when the notations are chosen in a convenient manner."

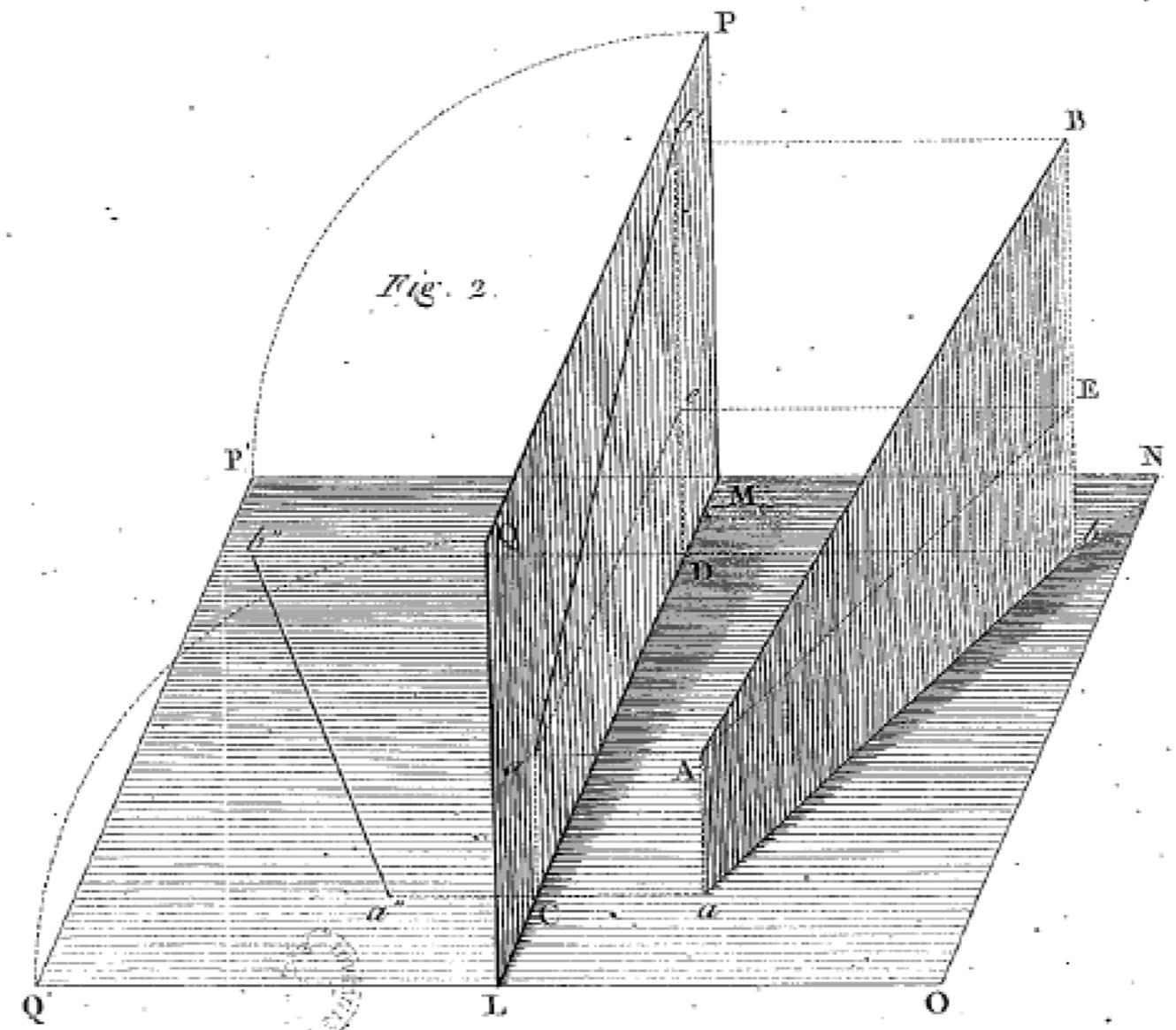
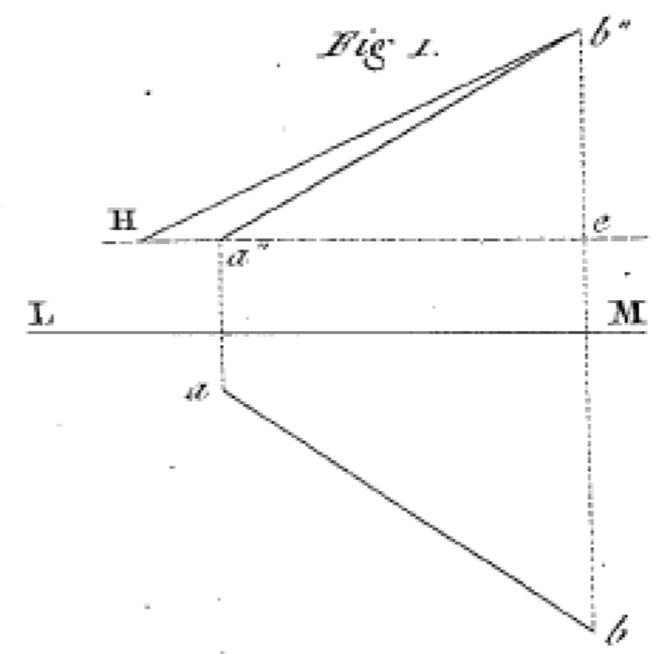
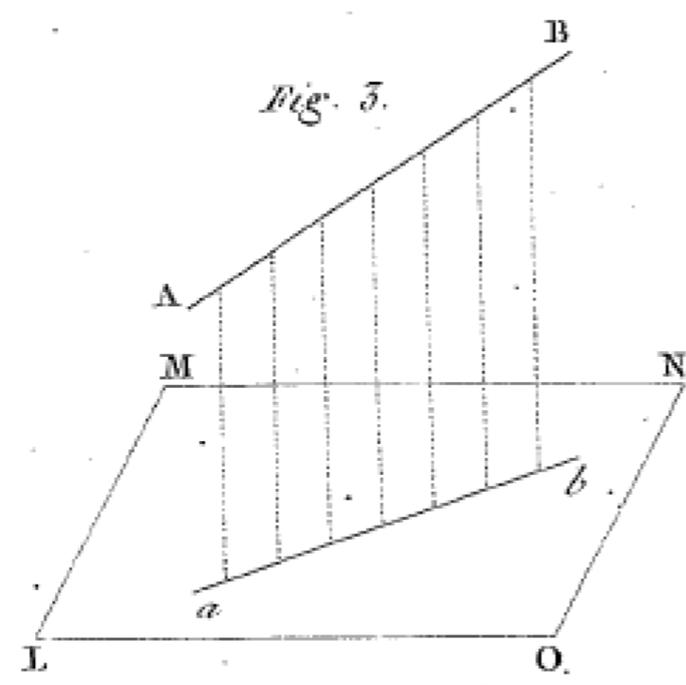
J. D. Gergonne (1826)

"Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue"

“There is a tradition, in the École polytechnique, that Monge knew to an unheard of degree, **how to render conceivable space forms of the most complicated extension, and how to penetrate their general relations and their most hidden properties, without any other recourse except that of his hands,** whose movements admirably followed his words, sometimes difficult, but always endowed with true eloquence on the subject: the clarity and the precision, the richness and the depth of ideas.”

Michel Chasles (1837)

*Aperçu historique sur l'origine et le développement  
des méthodes en géométrie*



Seiner Excellenz

dem

Herrn Geheimen Staatsminister

**Freiherrn von Humboldt**

widmet diese Schrift

a l s e i n Z e i c h e n

seiner innigsten

Verehrung und Dankbarkeit

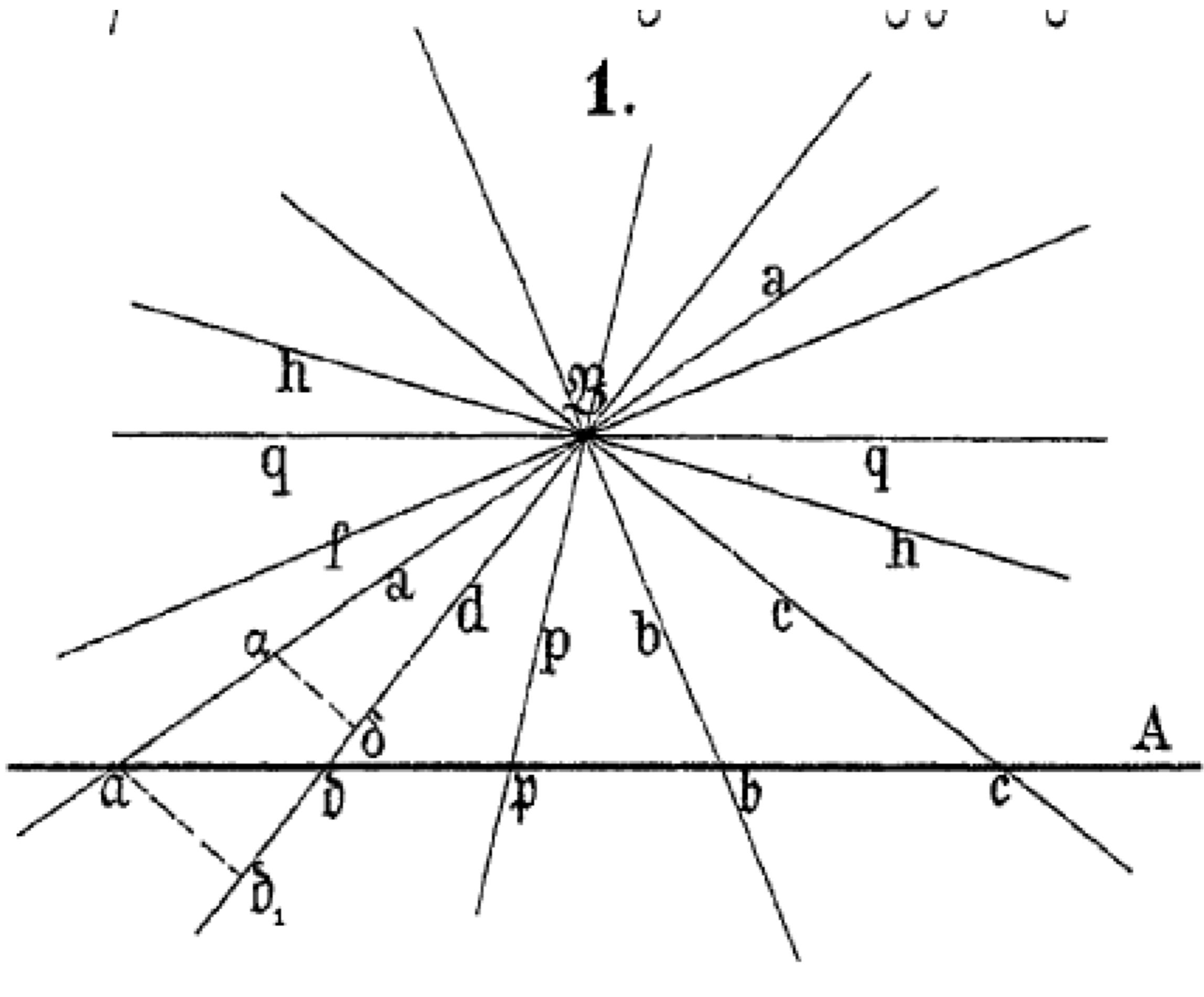
**"An event, however, is only partially visible in the world of the senses; the rest has to be added by intuition, inference, and guesswork.** The manifestations of an event are scattered, disjointed, isolated; what it is that gives unity to this patchwork, puts the isolated fragment into its proper perspective, and gives shape to the whole, remains removed from direct observation. For **observation can perceive circumstances which either accompany or follow one another, but not their inner causal nexus,** on which, after all, their inner truth is solely dependent."

Wilhelm von Humboldt (1821)  
*The Task of the Historian*

## 4. Conclusions



1.



Thank you.

“Through the Pestalozzian form of teaching many new geometry textbooks have encouraged posed problems [...] that through their solution the general laws underlying their determination would be duly discussed.”

Jakob Steiner (1826)

“Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes”

“It is an old saying, and a very true one, that our attention is much more forcibly attracted, and more permanently fixed, by objects which have been brought before our eyes, than by others, of which we have merely gathered some notion from hearsay and description, or from the mention of a name.”

Johann Heinrich Pestalozzi (1819)  
*Letters on Early Education*

Der Hauptinhalt, oder das Wesentliche der gesammten Resultate, die durch dieses Werk erzielt und erreicht werden, besteht, wie es sich schon aus der vorstehenden Uebersicht ohngefähr entnehmen lässt: „In Untersuchungen über die Abhängigkeit der Gestalten (Figuren) von einander.“

Bei den folgenden Betrachtungen lassen sich die Gebilde und ihre verschiedenen Verbindungen, weil sie nicht mehr in einer Ebene liegen, nicht leicht durch Zeichnungen (Figuren) vorstellig machen; dieses ist aber auch nicht nöthig, weil durch zweckmässige Benennungen das Festhalten der Zusammenstellungen der zu betrachtenden Gebilde erleichtert wird.

\*) Wir fügen hier beiläufig folgende Bemerkungen hinzu:

1. Legt man durch  $A$  eine Ebene parallel mit  $B$ , durch  $B$  eine Ebene parallel mit  $C$  und durch  $C$  eine Ebene parallel mit  $A$ , und nimmt diese drei Ebenen als Coordinaten-Ebenen an, so ist die Gleichung des genannten Hyperboloïds  $H$

$$(x-a)(y-b)(z-c) = xyz,$$

welche, wenn

$$a = 2\alpha, \quad b = 2\beta, \quad c = 2\gamma$$

gesetzt wird, auf die Form

$$(x-\alpha)(y-\beta)(z-\gamma) = (x+\alpha)(y+\beta)(z+\gamma)$$

gebracht werden kann, in welcher Gestalt sie die Gleichung der genannten Fläche ist, wenn ihr Mittelpunkt der Anfangspunct der Coordinaten ist, und diese letzteren mit irgend drei Geraden  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , welche in der Fläche liegen und der nämlichen Schaar Geraden angehören, parallel sind. Aus dieser Gleichung leitet man leicht die von Binet gegebene Gleichung ab (Crelle's Journal Band I. S. 347).

